Conatus theoriam parallelarum stabiliendi recentes,

quos

Venia Ampl. Facult. Philos.

publico examini,

Præside

Mag. CAROL. JOH. Ds HILL,

Math. Prof. Reg. et Ord.,

lauream ambiens submittit

CAROL. GUST. HÖGBERG,

Philos. Cand., Ostrogothus.

In Lyceo Carol. die XVII Jun. MDCCCXLIV.

P. VI.

Lundæ,
typis Berlingianis,
MDCCCXLIV.

BECB' parallelarum paria erunt, transversali *EC* communi ideoque æquali atque angulis ad *C* rectis ideoque æqualibus gaudentia; quare anguli *BEC* et *FEC* æquales ex modo demonstratis sunt, vel saltem quantitate data minore differunt. Si igitur anguli ad *E* contigui æquales sunt, etiam recti ex. def. sunt, ideoque *CE* in *EF* normalis. Sin minus, cum quam minimum inter se differant, simulque duos rectos constuunt, uterque a recto quam minimum differat, alter in plus alterque in minus, seu anguli ad *E* erunt $R+\omega$ et $R-\omega$, exsistente ω quantitate data minore vel infinite parvo. Cum vero omnia utrimque similia sint, nulla vero subsit causa, cur hæc differentia (ω) potius ab una quam ab altera parte ipsius *EC* exsisteret, ideo hæc nulla (fere) est.

Cor. 3. Fig. 8. Parallelarum anguli alterni minus quantitate data differunt, vel potius æquales sunt. Vel saltem hoc contendere licet, angulum externum interno haud minorem esse.

Sint enim $B^\circ A$ et *CD* parallelæ a transversa *AC* quacunque sectæ, quæ jam in *E* bisecetur, ducaturque per *E* linea *EF* istis parallela, nempe per *B* punctum ($=B^\circ=B'$) infinite dissitum transiens, in quo illæ concurrere censeantur. Quibus factis, $B^\circ AEB$ et *DCEF* ut ejusmodi parallelarum paria, de quibus modo egimus, censeri possunt, utut habentia latus $AE=EC$ et ang. *E* verticales æqualia, quare jam anguli alterni α æquales sint, vel minus quantitate data differant. Aliter et melius hoc per præc. Cor. confirmatur.

Cor. 4. Fig. 6. Parallelarum angulus est nullus. Hoc vel inde elucet, quod sibi numquam occurrant, vel ita probatur: Sit parallelarum *AD'* et *BD* angulus quidam δ, superque transversa quacumque *AB* et cum angulo dato *A* constituatur triangulum *ACB* gaudens angulo *C* ipso δ minore (Δ 1. Cor. 3.) Quo facto, inter *BA* et *BC* dabitur aliqua linea *BD'* cum *AC* faciens angulum $AD'B=\delta$, cum horum uterque $>C$ sit, minor vero contiguo ipsius *A*, ut facile constat. Lineæ igitur angulum δ facientes alicubi (in *D'*) concurrerent, nec ideo parallelæ forent, q. a.

Cor. 5. Cum vero in ipsa propositione docuerimus, angulos ejusmodi parium parallelarum lateri æquali adjacentes minus angulo ad apicem longinquum differre, quem jam nullum esse docuimus, patet hos angulos jam nihilo differre. Hinc vero

aperte demonstratio Cor. 2 ita completur, ut illud (fere) jam tuto deleas. Simulque Cor. 3. inde demonstres.

Aliter: Quoniam anguli alterni, quos linea intermedia parallelis extremis parallela, facit, nihilo æquales sint, (vel saltem dato quovis minores, (ex Coroll. pp.) ideoque inter se æquales, etiam alterni ad transversam quamcumque BA æquales sint. Hac enim in C' bisecta, ductaque per C' recta DE' ipsis parallelis AE' et DB parallela vel fere parallela, in triangulis $AC'E'$ et $BC'D$ æquales sunt $AC' = C'B$, et anguli $AC'E' = BC'D$ atque $E' = D$ (quippe qui $= o$, vel infinite parvi, seu dato quovis minores sunt), ideoque (1: 26) necessario ang. $C'AE' = C'BD$ seu alterni æquales. *Q. E. D.*

Schol. 1. Hic revera Euclidis axioma adhibere videmur, idque sensu latiore, quam ille, ponentes lineam fere parallelam utrique parallelarum occurrere, quo sane casu anguli A et C' ad duos rectos quam proxime accedunt. Sed ponamus AE' et BD æquales esse factas deindeque infinitas fieri, eruntque quoniam $AC' = C'B$, $AE' = BD$ et ang. $D = o = E'$ triangula $AC'E'$ et $BC'D$ congrua, sicuti opus est, ut anguli alterni A et B æquales probentur, saltem si horum alteruter rectus ponitur, quo casu alter rectus erit (v. Prop. p. 24). — Nihilo minus dubium aliquod adhuc tibi hæret?

Schol. 2. Sed hoc ipsum est, quod ubique dubitationem movet, Euclidæam definitionem 35. notas parallelarum tantum negativas proponere ideoque aliquid indeterminati relinquere, unde uni lineæ plurimæ parallelæ per idem punctum duci posse videntur.

Hac saltem de causa aliæ definitiones tentandæ videntur, quæ eandem difficultatem secum ferre nequeant.

Quæ vero in parallelarum locum introducendæ videntur, sunt et fuerunt *æquidistantes* et *connormales,* de quibus igitur mox nobis agendum erit.

c) Theoria ex principio exhaustionis desumta.

Prop. 1. Probl. Data recta AK et puncto externo B, per hoc B ad (Fig. 9.) illam AK utrimque rectas BP, BK inclinare licet angulum comprehendentes dato D minorem KBQ.

Dimidietur ang. D per DE, quæraturque ($\mathcal{A}$. 4.) in altero crure DG punctum G tam a D longinquum, ut hujus ab altero DE distantia GE major sit distantia AB in AK normali puncti dati B a data AK, faciamusque $AP = DE$, atque $BQ = PA$ in producta PB, erigamusque in BQ normalem JQ duplam illius AB. Quo facto, angulus JBQ dato D minor erit. Bisecemus enim JQ in H, ducamusque BH.

Quoniam igitur in triangulis rectangulis $PA = BQ$ et $AB = \frac{1}{2}JQ = HQ$ sunt, erit (1: 4) angulus $HBQ = APB$, qui minor dimidio GDE ipsius D est, quia $AP = DE$ et $AB < GE$ fecimus. Parallelæ igitur (1: 27) sunt PA et BH, atque duplus HBQ ipso D minor. Quia vero in triangulo JBQ rectangulo ad Q latus JQ in H bisecuimus, erit totus angulus JBQ minor duplo HBQ ($\mathcal{A}$. 2. Cor. 5), ideoque ille etiam ipso D minor, sicuti contendimus. Ulterius hujus latus BJ satis productum datam AK alicubi tacturum dicimus. Quoniam enim lineæ BH et PAK parallelæ sunt, et una harum BH cum BJ datum constituit angulum JBH, altera etiam aliquem constituat, ideoque BJ alteri PAK alicubi (ut in K) occurrat necesse est, cum in cruribus hujus anguli puncta utcunque distantia (per. $\mathcal{A}$. 4.), ideoque magis quam ipsæ parallelæ dissita inveniantur; (conferas, quæ mox de Procli axiomate monebimus). Inclinatæ igitur sunt per B lineæ PBQ et KB ad datam AK, angulum KBQ dato D minorem comprehendentes. *Q. E. F.*

Schol. Hæc propositio axiomati nonnullis (Lorenz aliisque) familiari, per punctum in angulo datum lineam ipsius crura secantem duci posse, æquivalet. Nobis vero non est axioma sed problema rite demonstratum. — Aliter tamen postrema hujus demonstrationis pars ita confici videtur. Constituamus enim versus A ad BQ angulum RBQ dato GDF seu D acuto æqualem, cadetque BR inter BA et BJ, quia jam $JBQ < D$ ostendimus. Sit vero præterea ang. $rBH = P$, ideoque $rBQ = 2.P$, quem jam ipso D minorem probavimus. Quia igitur $D = RBQ > rBQ$,

JBH vero $< P$, rB inter RB et JB cadit. Quoniam vero $RBQ > 2 . P$ et $RBQ + RBP = 2R =$ duobus rectis, erit $RBP < 2R - 2P$, ideoque $\frac{1}{2} . RBP + P <$ Recto R. Cum igitur angulus P complemento dimidii RBP minor sit, ex casu ipsius axiomatis antea (pag. 28.) demonstrato linea RB ipsi PA satis productæ alicubi, ut in R, occurret. Producta deinde AR in r (vel K), aperte constitutus erit angulus rBQ dato RBQ vel D minor, lineæque igitur per B inclinatæ, sicuti requirebatur.

Schol. Sed postrema hæc demonstratio, ut pleræque parallelarum theoriæ, paralogismo laboret parum occulto, quem ideo facile detegas.

Aliter: Præmisso hujusmodi *axiomate:* angulus externus utrosque internos haudquaquam quoties libet (ex gr. octies vel n—ies) superat; — finiti enim sunt, finitamque igitur habeant rationem. Quo concesso, dimidiatur angulus datus D seu GDF, donec perventum fuerit ad partem pariter parem $GDE < \frac{D}{2n}$, quæramusque in hoc crurum distantiam $GE = > AB$ (A. 4.), faciamusque $AP = JA = DE$, eritque (ut in prima solutione) ang. $APB < GDE < \frac{D}{2n}$, ideoque $2n . APB < D$. Est vero externus $JBQ < n . (APB + AJB) = 2n . APB$, ideoque $< D$, sicuti requiritur.

Schol. Postmodum vero $n < 2$ invenietur. Hæc vero probatio ad partem analytica est.

Prop. 2. Theor. *Anguli parallelarum alterni æquales sunt.* (Fig. 9.)

Sint AP et BH parallelæ, a transversa AB sectæ, dicimusque angulos alternos PAB et ABH æquales esse. Ducamus enim per B alias quascumque ipsam AP secantes PBQ et BK, eritque (1: 16) externus $ABQ >$ interno PAB major, hic vero $>$ interno ABK. Alter vero angulus alternus $ABH >$ ipso ABK est major, sed ipso ABQ minor. Uterque igitur angulus alternus PAB et ABH inter eosdem limites in-

cluduntur, ut scilicet sit tum $ABQ > PAB > ABK$
tum $ABQ > ABH > ABK$; sed limitum ABQ et ABK differentia KBQ angulo quocumque dato minor (ex prop. præc.) reddi potest; Ergo (Theor. Exhaust. B 2 in Præs. Proportions-lära) anguli PAB et ABH necessario æquales sunt.

Schol. Cum Procli axioma seu Lem. 4. demonstraerimus, ipso duce theoriam parallelarum absolvamus. Revera tamen ille adhuc alterum obiter et tacite admittit axioma, quod etiam multis de causis admittendum videtur, hoc nempe:

Ax. Parallelarum distantiam ubique esse finitam (l. limitatam), quia alias, ipso judice, parallelæ non essent *). Quo cum facile demonstratur:

Prop. 3. ***Lineam, quæ parallelarum alteram secat, etiam alteram secare.***

Quoniam enim angulum cum illa facit, hujus crurum satis productorum distantia (per *A.* 4.) tandem excedet omnem datam vel finitam lineam, ideoque etiam distantiam, quæ parallelis intercedit, quare linea illa, alterum crus constituens, alteram necessario parallelam secet.

Vel aliter. (Fig. 9.). Sit BH ipsi PA parallela, a BJ in B secta, demittasque BA in PA normalem, quærasque in JB punctum J,

---

***) Quod quidem ita explicari potest. Quoniam parallelarum angulus est nullus, ut antea (p. 37. 4. Cor.) ostendimus, ipsarum par ab pari linearum angulum constituentium, cujus crura tandem infinite a se invicem distare ostendimus, aliqua re differat, hac nempe, quod haud infinite a se invicem distent. — Vel etiam hoc axioma ex sequente principio explices: rectas lineas sese nusquam secantes in terminis extremis infinite a se invicem nequaquam distare posse, si in medietatibus suis parum inter se distant. (Conferas quæ in fine theoriæ connormalium de simili principio moturi sumus).**

cujus a BH distantia normalis $JH = > AB$ sit (*A. 4.*), sique JB ipsam PA productam adhuc haud attingeret, producas BJ in ξ faciasque ang. $\xi JL = KBH$, quærasque similiter in ξJ punctum ξ, cujus a JL distantia $= > AB$ sit, similemque iterum adhibeas constructionem, si opus fuerit, habebisque scalas, ipsi BH parallelas, innumeras, quarum distantia ipsam AB, quæ parallelis datis intercedit, superat; ergo per illas a BH ad PA descendere liceat.

Schol. Hæc prop. pueris etiam ita dilucidari potest: Duabus rectis lineis sese decussantibus, seu angulum constituentibus, tertia ipsas semper tangens suo motu continuo *planum* describit; quod ut plani definitionem geneticam censere licet. Quæ cum ita sint, si hæc tertia motu parallelo progreditur, hoc est tali, ut sese numquam secet, nova nempe numquam antiquam, ipsa totum planum per infinitas lineas parallelas dividet, quæ tamen omnes necessario ipsius anguli crura secent. Alterutrum igitur horum anguli crurum, quod unam parallelarum secat, necessario reliquas omnes secabit, angulo decussantium, itemque ipso parallelæ illius unius cum crure alterutro, exsistente quocumque. — Simul vero hinc patet, lineas, uni anguli cujusdam cruri parallelas, alterum secare. Unde etiam aliquam theoriam tentes. — Universim parallelarum disciplina eo simplicissime stabiliri videtur, quod aliud quoddam axioma jam antea adhibitum prævie demonstretur. Sic ex. gratia illud, quod jam in not. p. 13 adhibuimus, explicari potest: Quoniam parallelarum angulus est nullus (ut p. 37 probavimus), atque nihil vel nullum quantum aliquid bene determinatum sit, ut vel ex Arithmetica constat, linea, quæ alteri datœ parallela est, ipsa omni modo determinato gaudeat situ atque directione, si solummodo unicum ipsius punctum datum fuerit, ideoque necessario per punctum datum unica tantum linea datæ parallela duci potest. Constat enim, rectæ lineæ situm et positionem per data duo puncta determinari; quorum cum alterutrum datum sit, alterumque ea conditione definitum, ut hæc linea cum altera data nullum constituat angulum, lineam illam omnimode determinatam ideoque unicam fore, patet. Quin imo si dubium aliquod tibi hæret de corollario illo (ex p. 37 modo mutuato), nihil impedit, quominus parallelarum notionem ita mutes, ut per parallelas nihil nisi eas ejusdem plani lineas intelligas, quæ nullum invicem efficere angulum possunt. Patet